

Математика 10-11 класс

1. Два разбойника делили добычу, состоящую из пяти золотых слитков, масса одного из которых 1 кг, а другого – 2 кг. Какую массу могли иметь три других слитка, если известно, что какие бы два слитка ни выбрал себе первый разбойник, второй разбойник сможет так разделить оставшиеся слитки, чтобы каждому из них досталось золота поровну?

2. Известно, что в десятичной записи числа 2^{29} все цифры различны. Есть ли среди них цифра 0?

3. Доказать, что можно так расположить числа от 1 до n^2 в таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел каждого столбца были равны.

4. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D . XY – диаметр, проходящий через середину K хорды CD . Точка M – проекция точки X на прямую AC , а точка N – проекция точки Y на прямую BD . Докажите, что точки M , N и K лежат на одной прямой.

5. Существуют ли нецелые числа x и y , для которых $\{x\}\{y\} = \{x + y\}$? $\{x\}$ – дробная часть числа x .

6. Две прямые на плоскости пересекаются под углом α . На одной из них сидит блоха. Каждую секунду она прыгает с одной прямой на другую (точка пересечения считается принадлежащей обеим прямым). Известно, что длина каждого её прыжка равна 1 и что она никогда не возвращается на то место, где была секунду назад. Через некоторое время блоха вернулась в первоначальную точку. Докажите, что угол α измеряется рациональным числом градусов.

7. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

8. Докажите, что при любых целых a и натуральном n выражение $(a + 1)^{2n+1} + a^{n+2}$ делится на $a^2 + a + 1$.